تبدیل والش-هادامارد

Walsh – Hadamard Transform

گردآوری

محمـــد ســـــــعـدآبادی

فهرست:

معرفی

توابع والش که توسط یک ریاضی دان امریکایی بنام جوزف لئونارد والش[1]در سال ۱۹۲۳ ارائه شد عبارتند از توابعی راست گوشه و متعامد که در بازه [0,1] تعریف می شوند. تبدیل والش که مبتنی بر توابع والش می باشد روشی مکمل برای حوزه تبدیلات در تجزیه و تحلیل سیگنال ها است. ریاضیدان فرانسوی ، هادامارد[2]این مسئله را ثابت کرد . سپس آنرا توسعه داد و بعدا تبدیل هادامارد نامیده شد. این دو تبدیل به تبدیل والش هادامارد[3] مبدل شدند.

توابع والش می توانند در مرتبه های گوناگونی مرتب شوند. تبدیل گسسته والش - هادامارد[4]یک روش مهم تبدیل غیر سینوسی و روشی ریاضی محسوب می شود که آنالیز فرکانس را در تعدادی حوزه واقعی انجام می دهد. با توجه به اینکه ضرائب این تبدیل 1 و 1- می باشد و هیچ عمل ضربی احتیاج نیست در نتیجه این تبدیل در کانون توجه حوزه هایی نظیر تصاویر نوری و پردازش اطلاعات ، رمزنگاری منابع ، فشرده سازی تصاویر ، آلگوریتم های طیف نگاری تصویر و آلگوریتم های نقش آب[5]ناپیدای تصویر[6] قرار دارد.

بر اساس آخرین استاندارد کدگذاری ویدئو ، تبدیل هادامارد برای محاسبه سیگنال باقیمانده[7]مورد استفاده قرار گرفته است. در حال حاضرنیز بصورت گسترده ای در مطالعه نشر ارتباطات طیفی[8]بکار می رود.

یوآن ژان تینگ و همکارانش با مطالعه سیستم تابع والش ، تبدیلات متعامدی را با کارآیی عالی بدست آوردند و توانستند آلگوریتم نقش آب دیجیتالی مقاومی را که بر اساس تبدیلات والش می باشد ارائه کنند.

---

1 Joseph Leonard Walsh
2 M.J Hadamard
3 WHT = Walsh –Hadamard Transform
4 DWHT = Discrete Walsh-Hadamard Transform
5 نقش‌آب (نقشاب) یا فیلیگران یا ته‌نقش یا واتر مارک، علائمی هستند که در زمینه‌های کاغذها، تمبرها یا اسکناس‌ها قرار داده می‌شوند و در حالت عادی قابل مشاهده نیست ولی اگر کاغذ یا تمبر در برابر آفتاب یا چراغ گرفته شود پدیدار می‌شوند.

6 Image blind – watermark algorithm
7 Residual Signal
8 Spreading Spectrum Communication

کای یوآنگ یو و همکارانش آلگوریتم سریعی برای جستجوی کلمه کد VQ[9] و مبتنی بر تبدیل هادامارد ارائه دادند. این آلگوریتم می توانست به نحو چشمگیری زمان جستجوی کلمه کد را بر اساس اصل ضمانت بهترین کارایی کاهش دهد.

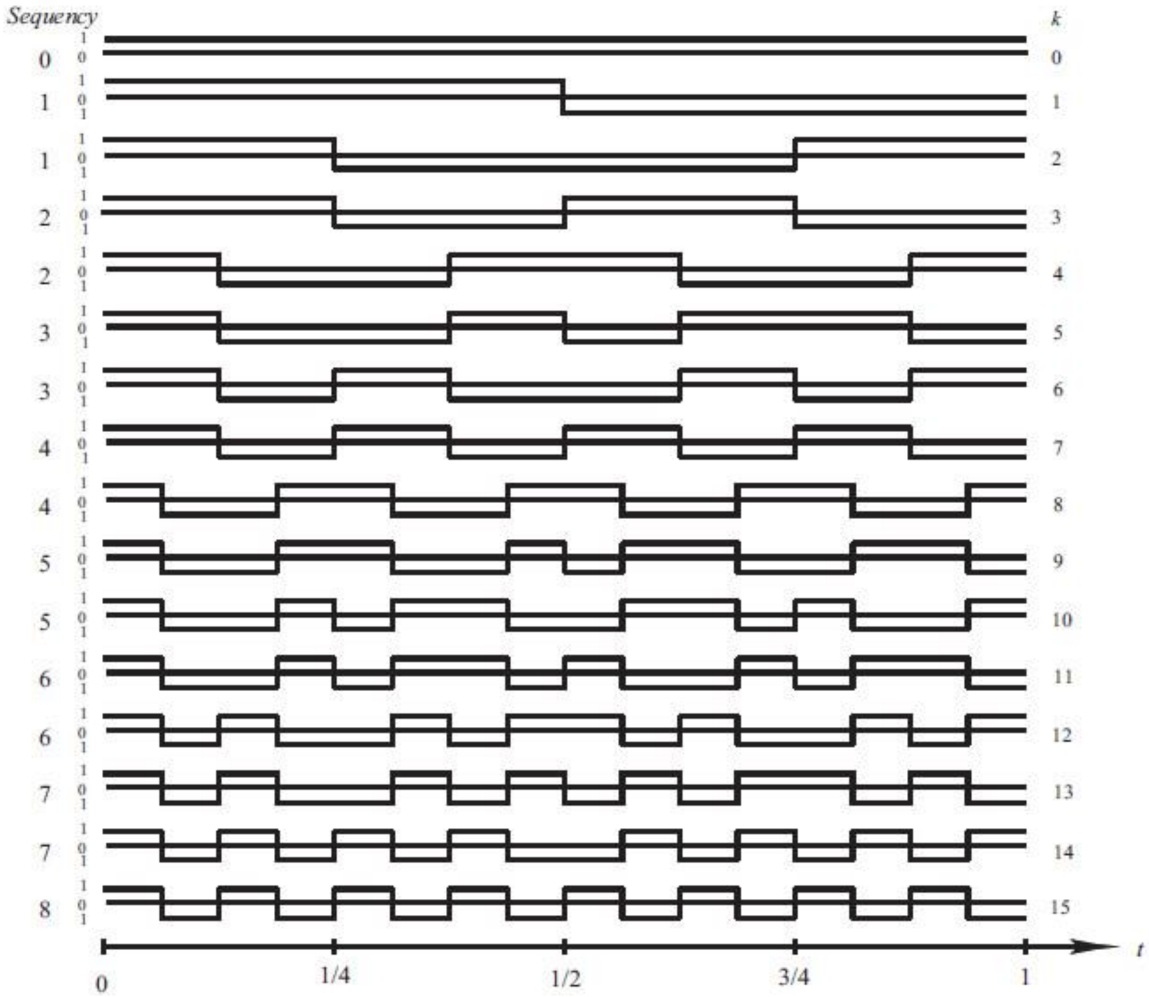
کیا یانگ و همکارانش آلگوریتم بهینه شده تست دوگانه ایی را پیشنهاد دادند که به کمک تبدیل هادامارد و بخش بندی برداری برای فشرده سازی سریع و کارای سیگنال تصویر بکار برده شد. آزمایش آنها نشان داد که این کار باعث بهینه سازی کارایی در جستجوی کلمه کد می شود.

تبدیل والش

توابع والش توابعی پایه ای برای تبدیل والش می باشد. بطوریکه این توابع پایه ای در مورد تبدیل فوریه بصورت فرکانسی بیان می شوند در صورتیکه توابع والش بر اساس توالی شان بیان می گردند. یعنی بصورت $\left[\frac{Z}{2}\right]$ مشخص می گردند که Z تعداد دفعات عبور تابع از صفر در واحد زمان می باشد.

توابع والش با مقدار فرد Z=2S-1 و مقدار زوج Z=2S دارای توالی یکسانی می باشند. در شکل زیر ۱۶ تابع والش به ترتیب توالی شان نمایش داده شده است.

[9] Code Word



فرض کنید تابعی بصورت زیر داریم:

$$f(x), x = 0,\ldots,N-1 \text{ where } N = 2^n$$

اگر از نمایش دودویی برای نشان دادن x استفاده کنیم به n بیت احتیاج خواهیم داشت.

تبدیل والش را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) \Leftrightarrow W(u)$$

$$(x)_{10} = (b_{n-1}(x)b_{n-2}(x)\ldots b_0(x))_2, \quad b_i(x)\,0 \text{ or } 1 \quad \text{for } i = 0,\ldots,n-1$$

$$(u)_{10} = (b_{n-1}(u)b_{n-2}(u)\ldots b_0(u))_2$$

بعنوان مثال با فرض داشتن ۸ نمونه داریم:

$$f(x), x = 0, \ldots, 7, \quad (8 \text{ samples})$$

$$n = 3$$

$$f(6), 6 = (110)_2 \Rightarrow b_2(6) = 1, b_1(6) = 1, b_0(6) = 0$$

تبدیل یک بُعدی والش را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left[\prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x) b_{n-1-i}(u)} \right]$$

و یا می توانیم بصورت زیر نیز تعریف کنیم:

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_{n-1-i}(u)}$$

آرایه شکل یافته بوسیله هسته های والش[10] مجددا ماتریسی متقارن می باشد که دارای سطرها و ستون های متعامد می باشد.

تبدیل والش دو بعدی را می توان بصورت زیر بدست آورد.

$$W(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{(b_i(x) b_{n-1-i}(u) + b_i(y) b_{n-1-i}(v))} \right]$$

و یا

$$W(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} (b_i(x) b_{n-1-i}(u) + b_i(y) b_{n-1-i}(v))}$$

---

[10] Walsh kernels

تبدیل معکوس والش[11]

این تبدیل بصورت زیر بدست می آید:

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}W(u)\left[\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}\right]$$

و یا می توان بصورت زیر عمل کرد:

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}W(u)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

در حالت دو بُعدی نیز خواهیم داشت:

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}W(u,v)\left[\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{(b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v))}\right]$$

و یا

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}W(u,v)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}(b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v))}$$

خصوصیات تبدیل والش

- بر خلاف تبدیل فوریه که مبتنی بر جملات مثلثاتی می باشد تبدیل والش شامل دنباله ای گسترده از توابع پایه ای است که مقادیر آنها فقط **1+** و **1-** است. این توابع می توانند بصورت موثری در محیط های دیجیتال بجای توابع نمایی تبدیل فوریه بکار گرفته شوند.
- هسته های تبدیل والش مستقیم[12] و معکوس[13] شبیه به هم می باشند به استثنای یک ضریب $\frac{1}{N}$ که در حالت یک بعدی وجود دارد.

---

[11] Inverse walsh transform

- هسته های تبدیل والش مستقیم و معکوس در حالت دو بعدی نیز شبیه به هم هستند زیرا آرایه تشکیل شده بوسیله هسته ها ، ماتریسی متقارن است که دارای سطرها و ستون های متعامد می باشد. بنابراین معکوس این آرایه ، شبیه به خود آرایه خواهد بود.
- تبدیل والش از امواج مربعی بعنوان توابع پایه[۱۴]استفاده می کند و این توابع از 1- تا 1+ متغیرند.
- هنگام بحث در مورد والش ، بجای تواتر[15]از توالی[۱۶]صحبت می کنیم. توالی تعداد دفعات عبور از صفر[۱۷]یا تعداد انتقال ها در بردار پایه می باشد.
- تبدیل والش نمایش دهنده خصوصیت فشردگی انرژی[۱۸]می باشد.
- از مزایای تبدیل والش این است که احتیاجی به ریاضیات ممیز شناور[۱۹]یا توابع غیر جبری[۲۰] نمی باشد.
- برای انجام محاسبات سریع تبدیل والش چندین آلگوریتم ارائه شده است که اصطلاحا تبدیل سریع والش[۲۱]نامیده می شود. در حقیقت این کار بهبودی از تبدیل سریع فوریه[۲۲]می باشد.

تبدیل هادامارد

تبدیل هادامارد مثالی از کلاس عمومی تبدیلات فوریه است. ناسا در طی سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ میلادی از تبدیل هادامارد بعنوان پایه و اساسی برای فشرده سازی تصاویر حاصل از کاوشهای بین سیاره ای استفاده کرد. هادامارد از نظر محاسباتی ساده تر بوده و کمکی است برای تبدیل فوریه ، زیرا تبدیل هادامارد به هیچ عملگر ضرب یا تقسیمی احتیاج ندارد و تمامی عوامل سازنده آن مثبت و منفی 1 می باشند.

---

[12] Forward
[13] inverse
[14] Basis Function
[15] Frequency
[16] Sequency
[17] Zero Crossing
[18] Energy Compaction
[19] Floating-Point Math
[20] Transcendental Functions
[21] Fast Walsh Transform = FWT
[22] FFT

عملگرهای ضرب و تقسیم به نحو فزاینده ای بر روی کامپیوترهای کوچک بکاررفته در فضاپیماها زمانبر بود . بنابراین برای جلوگیری از هدر رفتن زمان و انرژی از این عملگرها حدالمقدور استفاده نمی کردند. البته بعدها با پیدایش کامپیوترهای با سرعت بالاتر و نیز پیشرفتهای حاصل در انجام عمل ضرب در یک سیکل و همچنین تکامل آلگوریتم های جدید تبدیل فوریه نظیر تبدیل فوریه سریع ، استفاده از هادامارد کم رنگتر شد. اما باید به این نکته اشاره کرد که امروزه هادامارد در حال بازگشت به صحنه محاسبات کوانتومی می باشد. بسیاری از آلگوریتم های کوانتومی از تبدیل هادامارد بعنوان اولین گام برای مقدار دهی اولیه استفاده می کنند.

ضرایب تبدیل هادامارد همگی 1- و 1+ می باشند. تبدیل هادامارد سریع ، می تواند با تعدادی جمع و تفریق محدود شود و این کار اجازه استفاده از سخت افزارهای ساده تر را نیز فراهم می کند تا محاسبه تبدیل به راحتی انجام شود. در نتیجه کاهش هزینه سرعت محاسبات برای تبدیل هادامارد مطلوب خواهد بود.

تبدیل هادامارد از نظر ظاهری شبیه به تبدیل والش می باشد. تبدیل هادامارد دو بُعدی بصورت زیر تعریف می شود.

$$H(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\left[\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{(b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v))}\right]$$

و یا

$$H(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1}(b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v))}$$

اگر H یک ماتریس $N \times N$ هادامارد باشد آنگاه حاصلضرب H و ماتریس ترانهاده[۲۳]آن ، ماتریسی همانی[۲۴]خواهد بود یعنی

$$HH^T=NI$$

در اینجا I ماتریس همانی است . چون H متقارن است بنابراین

$$HH=NI$$

ردیفها(ستون ها) در ماتریس هادامارد می تواند با هم تعویض شود بدون اینکه در خاصیت تعامد ماتریس تاثیر بگذارد.

کم رتبه ترین ماتریس هادامارد دارای مرتبه 2 است.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ساده ترین شکا ماتریس هادامارد زمانی است که مرتبه ماتریس برابر $N=2^n$ باشد که n عددی صحیح است . در این حالت اگر H ماتریسی هادامارد با مرتبه N باشد آنگاه ماتریس G نیز یک ماتریس هادامارد از مرتبه 2N است.

$$G = \begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix}$$

در زیر چندین ماتریس هادامارد با مرتبه $N=2^n$ نشان داده شده است.

---

23 Transpose
24 Identity matrix

$$N = 2 \quad \begin{array}{c} \text{matrix} \\ \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Sequency} \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$N = 4 \quad \begin{array}{c} \text{matrix} \\ \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Sequency} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$N = 8 \quad \begin{array}{c} \text{matrix} \\ \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Sequency} \\ 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

ساختار ساده دیگری از ماتریس هادامارد می تواند بصورت زیر باشد .

اگر ماتریس های A و B ماتریس های هادامارد به ترتیب با مرتبه های M و N باشند آنگاه ماتریس هادامارد با مرتبه M.N بصورت زیر وجود خواهد داشت.

$$\boldsymbol{H}_{M \cdot N} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} \cdots a_{1M}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{M1}\boldsymbol{B} \cdots\cdots & a_{MM}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

در طول هر ردیف تعداد تغییر علامت ها با نام توالی نامیده می شود. در حقیقت توالی تفسیری است از فرکانس که توسط هارموث[۲۵]ابداع شد. می توان ماتریس هادامارد‌ی ساخت که دارای مرتبه $N=2^n$ باشد و دارای مولفه توالی اعداد صحیح از 0 تا N-1 نیز باشد.

تعبیر فرکانسی از توالی های تغییر علامت در ردیف های ماتریس هادامارد می تواند تصور برابری هر ردیف با یک موج مربعی را که بین 1+ و 1- و با زیر تناوب[۲۶] $\frac{1}{N}$ است به ذهن متبادر کند. چنین توابعی ، توابع والش نامیده می شوند. بنابراین هر کجا به ماتریس هادامارد اشاره می شود در واقع صرفا انجام تجزیه یک تابع توسط مجموعه ای از امواج مربعی بجای امواج سینوسی همانند آنچه در تبدیل فوریه بود مد نظر می باشد.

تبدیل معکوس هادامارد

تبدیل معکوس هادامارد نیز بصورت زیر محاسبه می شود که در آن $N=2^n$ می باشد.

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}H(u,v)\left[\prod_{i=0}^{n-1}(-1)^{(b_i(x)b_i(u)+b_i(y)b_i(v))}\right]$$

خصوصیات تبدیل هادامارد

- تبدیل هادامارد نیز همانند تبدیل والش از امواج مربعی با دامنه تغییرات 1- تا 1+ استفاده می کند.
- تبدیل هادامارد از تبدیل والش بواسطه تفاوت در مرتبه توابع پایه[۲۷] متمایز می گردد. مرتبه توابع پایه تبدیل هادامارد اجازه انجام محاسبات سریع را بوسیله روش های بهبود یافته FFT نمی دهد.
- این تبدیل نمایانگر خصوصیت فشردگی انرژی نمی باشد.

---

[25] Harmuth
[26] Subperiod
[27] Order of basis functions

- بر خلاف تبدیل فوریه که داده ها را روی دسته موج های سینوسی تصویر می کند ، تبدیل هادامارد داده ها را روی یک سری تابع های مربعی بنام تابع های والش تصویر می کند.
- نوع گسترش یافته ای از تبدیل هادامارد تحت نام تبدیل هادامارد مرتب شده[۲۸]وجود دارد که می توان آنرا برای محاسبات سریع تبدیل هادامارد[۲۹]بکار برد. این نوع گسترش یافته ، خصوصیت فشردگی انرژی را نشان می دهد.
- مهمترین خصوصیت تبدیل هادامارد این است که H_N نمایانگر ماتریس مرتبه **N** است و رابطه بازگشتی بصورت زیر بیان می شود.

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

- این تبدیل به راحتی و با ضرب در ماتریس هادامارد بدست می آید.
- ماتریس های هادامارد با مرتبه های پائین بصورت زیر می باشند.

$$H_0 = 1;$$

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

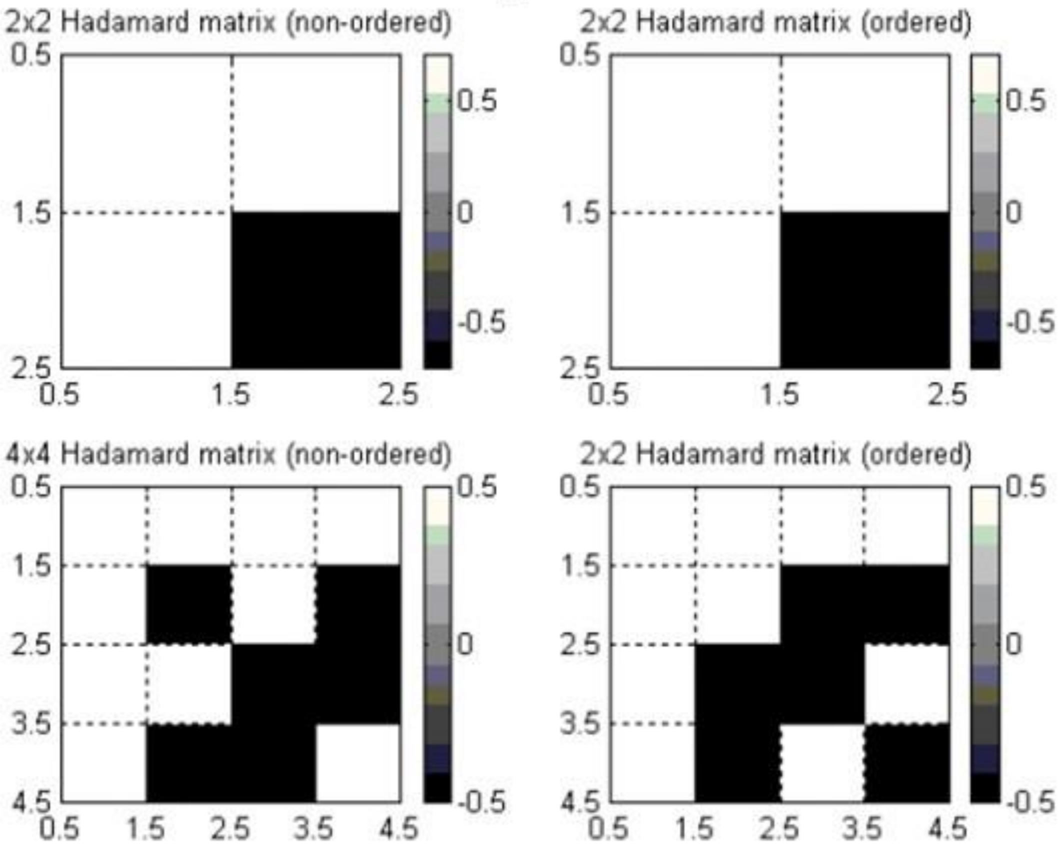
- بطور کلی هر ماتریس هادامارد با مرتبه **2N** می تواند بصورت زیر بدست آید.

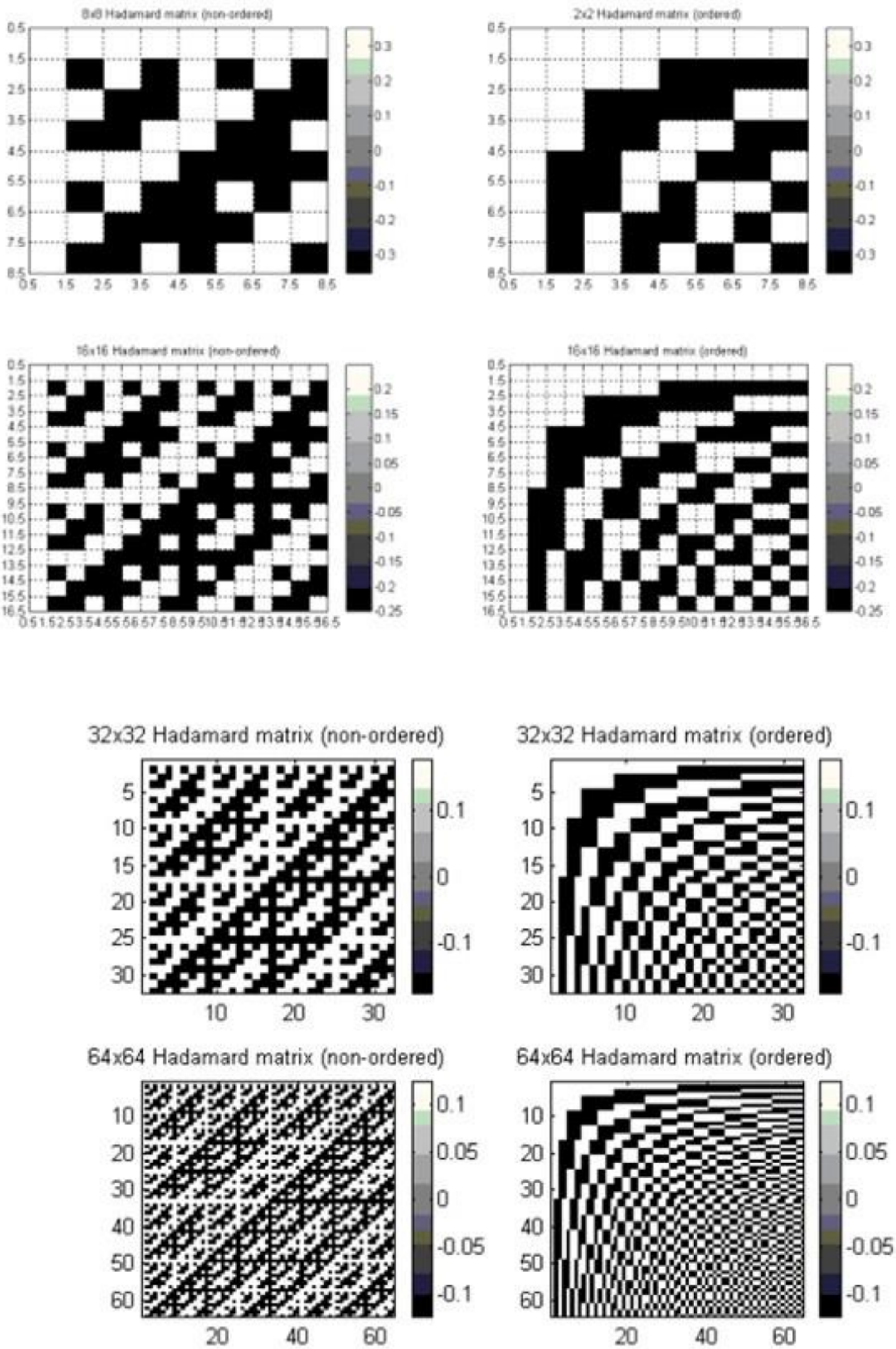
---

28 Ordered Hadamard Transform
29 Fast Hadamard Transform = FHT

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

- البته گاهی اوقات نرمال سازی نیز انجام می شود.
- در زیر ماتریس های هادامارد مرتب شده و نامرتب نمایش داده شده است.




8x8 Hadamard matrix (non-ordered)
2x2 Hadamard matrix (ordered)
16x16 Hadamard matrix (non-ordered)
16x16 Hadamard matrix (ordered)
32x32 Hadamard matrix (non-ordered)
32x32 Hadamard matrix (ordered)
64x64 Hadamard matrix (non-ordered)
64x64 Hadamard matrix (ordered)

تبدیل هادامارد تصویر

فرض کنید آرایه f(x,y) نمایانگر شدت روشنایی نمونه های یک تصویر اصلی بر روی یک ارایه با تعداد نقاط N^2 باشد . آنگاه تبدیل دو بعدی هادامارد ، F(u,v) مربوط به f(x,y) بوسیله ضرب ماتریسی زیر بدست می آید.

$$[F(u, v)] = [H(u, v)][f(x, y)][H(u, v)]$$

در اینجا [H(u,v)] ماتریس متقارن هادامارد با مرتبه N می باشد.

ضرب های پیش و پس از [F(u,v)] بوسیله ماتریس هادامارد نتیجه زیر را در بر خواهد داشت:

$$[H(u, v)][F(u, v)][H(u, v)] = [H(u, v)][H(u, v)][f(x, y)][H(u, v)][H(u, v)].$$

اما از قبل می دانستیم که HH=NI ، بنابراین داریم:

$$[f(x, y)] = \frac{1}{N^2}[H(u, v)][F(u, v)][H(u, v)]$$

با کنار گذاشتن ثابت مقیاس دهی[۳۰] N^2 ، آرایه های f(x,y) و F(u,v) اجزای تبدیل دوبعدی خواهند بود. برای ماتریس های متقارن با مرتبه $N=2^n$ ، تبدیل دو بعدی هادامارد ممکن است بصورت سری زیر نوشته شود:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)(-1)^{p(x,y,u,v)}$$

بطوریکه :

$$p(x, y, u, v) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (u_i x_i + v_i y_i).$$

[30] Scaling

جملات u_i ، v_i ، x_i و y_i به ترتیب نمایش دودویی u ، v ، x و y می باشد. بعنوان مثال :

$$(u)_{\text{decimal}} = (u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0)_{\text{binary}}$$

در اینجا $\mathbf{u}_i \in \{0, 1\}$.

این شکل نمایش طبیعی تبدیل هدامارد می باشد.

نمایش سری های دیگر از ماتریس هادامارد بصورت مرتب[31]وجود دارد که در آن توالی هر ردیف از آن ردیف بزرگتر است و بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)(-1)^{q(x,y,u,v)}$$

بطوریکه:

$$q(x, y, u, v) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \left[g_i(u)x_i + g_i(v)y_i\right]$$

$$\begin{aligned} g_0(u) &\equiv u_{n-1} \\ g_1(u) &\equiv u_{n-1} + u_{n-2} \\ g_2(u) &\equiv u_{n-2} + u_{n-3} \\ &\vdots \\ g_{n-1}(u) &\equiv u_1 + u_0. \end{aligned}$$

[31] Ordered

خصوصیات تبدیل هادامارد تصویر

تبدیل هادامارد بر روی تصویر دارای چندین خصوصیت جالب می باشد. مهمترین خصوصیت از نقطه نظر کد کردن تصویر[32]، نگهداری انرژی ، طیف پویا و نگهداری آنتروپی می باشد. جمله توالی صفر[33]بصورت زیر است.

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

این جمله مقدار میانگین روشنایی صحنه را اندازه گیری می کند. اگر **f(x,y)** تابعی حقیقی و مثبت باشد آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای جمله توالی صفر N^2A خواهد بود بطوریکه **A** بیشترین مقدار **f(x,y)** می باشد.

همه نمونه های حوزه هادامارد بغیر از نمونه توالی صفر ، بین $\pm N^2 \frac{A}{2}$ می باشند. بزرگی جمله توالی صفر کرانی برای بزرگی نمونه های دیگر حوزه هادامارد می باشد. خصویت نگهداری انرژی بین حوزه مکانی[34] و حوزه هادامارد وجود دارد.

محاسبه تبدیل والش – هادامارد

تاکنون پژوهش های زیادی در زمینه محاسبه تبدیل والش – هادامارد سریع انجام شده است. مجموعه توابع گسسته والش را می توان از راههای گوناگونی بدست آورد. بعنوان مثال تبدیل والش به کمک مرتبه والش[35]می تواند در ابتدا با محاسبه تبدیل والش به کمک مرتبه هادامارد[36]بدست آید و آنگاه در ادامه ، با تغییر مرتبه و بر اساس کد گری معکوس[37]محاسبات ادامه یابد.

فرض کنید عبارت زیر سیگنال ورودی به ازای $N=2^L$ باشد.

---

[32] Image Coding
[33] Zero Sequency Term
[34] Spatial Domain
[35] Walsh order
[36] Hadamard order
[37] Reverse Gray code

$$X(0),\ X(1),\ \ldots,\ X(N-1)$$

تبدیل والش به کمک مرتبه هادامارد و معکوس آن بصورت زیر تعریف می شود.

$$X(t)=\sum_{i=0}^{N-1}W(i)wal_h(i,t), W(i)=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}X(t)wal_h(i,t)$$

بطوریکه $wal_h(I,t)$ عبارتند از توابع والش به کمک مرتبه هادامارد.

تبدیل والش – هادامارد در حالت یک بعدی می تواند بصورت ماتریس نمایش داده شود. بطوریکه H_N ماتریس هادامارد باشد.

$$X=[X(0),X(1),\ldots,X(N-1)]^T, W=[W(0),W(1),\ldots,W(N-1)]^T$$

تبدیل عبارت است از:

$$X=H_N W$$

تبدیل معکوس عبارت است از:

$$W=\frac{1}{N}H_N X$$

رابطه بازگشتی نیز بصورت زیر است:

$$H_1=(1), H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, H_N=\begin{pmatrix}H_{\frac{N}{2}} & H_{\frac{N}{2}}\\ H_{\frac{N}{2}} & -H_{\frac{N}{2}}\end{pmatrix}$$

تبدیل گسسته والش-هادامارد

این تبدیل در خیلی از کاربردهای مختلف نظیر تحلیل طیف قدرت[38]، فیلترینگ ، پردازش سیگنال های گفتار و پزشکی ، تسهیم و کدگذاری ارتباطات[39] ، توصیف سیگنال های غیر خطی ، حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی و تجزیه و تحلیل منطقی مورد استفاده قرار می گیرد. تبدیل والش – هادامارد تبدیلی غیر سینوسی و متعامد است که سیگنال را به مجموعه ای متعامد تجزیه می کند و این کار در حد مطلوب[40]و دارای توابعی مربعی شکل است که والش نامیده می شود. این تبدیل هیچ ضرب کننده ای نیاز ندارد و حقیقی می باشد زیرا دامنه توابع والش یا هادامارد 1+ و 1- می باشد. توابع والش شکل مربعی با مقادیر 1+ و 1- دارند. مهمترین خصوصیت توابع والش توالی است که عبارت است از تعداد دفعات عبور از صفر در واحد زمان . هر تابع والش دارای مقدار توالی منحصر بفردی می باشد. این توابع را می توان بصورت های مختلف تولید کرد. در نرم افزار متلب می توانیم از تابع **hadamard** برای ایجاد این تابع استفاده کنیم. در اینجا طول تابع والش 8 فرض شده است.

```
N = 8;  % Length of Walsh (Hadamard) functions
hadamardMatrix = hadamard(N)

hadamardMatrix =

     1     1     1     1     1     1     1     1
     1    -1     1    -1     1    -1     1    -1
     1     1    -1    -1     1     1    -1    -1
     1    -1    -1     1     1    -1    -1     1
     1     1     1     1    -1    -1    -1    -1
     1    -1     1    -1    -1     1    -1     1
     1     1    -1    -1    -1    -1     1     1
     1    -1    -1     1    -1     1     1    -1
```

---

[38] Power Spectrum Analysis
[39] Multiplexing and Coding in communications
[40] Suboptimal

سطرها یا ستون ها در این ماتریس متقارن می باشند و در برگیرنده توابع والش می باشند. توابع والش در این ماتریس ، به ترتیب افزایش مرتبه توالی شان یا همان تعداد دفعات عبور از صفر قرار نگرفته اند اما بر اساس مرتبه هادامارد چیده شده اند.

ماتریس والش که در ستون ها و سطرهای خود در برگیرنده توابع والش می باشد با افزایش مرتبه توالی ها می تواند بوسیله تغییر ایندکس ماتریس هادامارد بصورت زیر بدست آید.

```
HadIdx = 0:N-1;                          % Hadamard index
M = log2(N)+1;                           % Number of bits to represent the index
```

هر ستون از ایندکس توالی (در قالب دودویی) به پیمانه 2 بعلاوه ستون های بیت های معکوس ایندکس هادامارد (در قالب دودویی) بدست می آید.

```
binHadIdx = fliplr(dec2bin(HadIdx,M))-'0'; % Bit reversing of the binary index
binSeqIdx = zeros(N,M-1);                  % Pre-allocate memory
for k = M:-1:2
    % Binary sequency index
    binSeqIdx(:,k) = xor(binHadIdx(:,k),binHadIdx(:,k-1));
end
SeqIdx = binSeqIdx*pow2((M-1:-1:0)');    % Binary to integer sequency index
walshMatrix = hadamardMatrix(SeqIdx+1,:) % 1-based indexing
```

```
walshMatrix =

     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1    -1    -1    -1    -1
     1     1    -1    -1    -1    -1     1     1
     1     1    -1    -1     1     1    -1    -1
     1    -1    -1     1     1    -1    -1     1
     1    -1    -1     1    -1     1     1    -1
     1    -1     1    -1    -1     1    -1     1
     1    -1     1    -1     1    -1     1    -1
```

آلگوریتم های سریع شبیه آلگوریتم Code-Tukey برای اجرای تبدیل والش هادامارد با پیچیدگی O(N LogN) توسع یافت.

چون ماتریس والش متقارن است تبدیلات مستقیم و معکوس والش شبیه به هم می باشد با این تفاوت که یک ضریب $\frac{1}{N}$ نیز وجود دارد. توابع **fwht** و **ifwht** به ترتیب برای محاسبه مستقیم و معکوس تبدیل والش-هادامارد در نرم افزار متلب استفاده می شود.

مثال۱: تبدیل WHT را بر روی ماتریس والش اجرا کنید.

نتیجه مورد انتظار ، ماتریسی همانی است زیرا سطرها یا ستون های ماتریس متقارن والش در برگیرنده توابع والش می باشند.

```
y1 = fwht(walshMatrix)                % Fast Walsh-Hadamard transform

y1 =

     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     0     0     1
```

مثال ۲ : سیگنالی گسسته به کمک مقیاس بندی[۴۱] و اضافه کردن ستون های اختیاری ماتریس هادامارد ایجاد کنید.

این سیگنال به کمک توابع والش وزن دار شکل می گیرد. بنابراین WHTباید مقادیر غیر صفر را که برابر است با وزن های شاخص های توالی بازگرداند. هنگام ارزیابی WHT ، ترتیب بصورت **hadamard** مشخص شده است زیرا ماتریس هادامارد (بجای ماتریس والش) برای بدست آوردن توابع والش استفاده می شود.

[41] Scaling

```
N = 8;
H = hadamard(N);                         % Hadamard matrix
% Construct a signal by adding a few weighted Walsh functions
x = 8.*H(1,:) + 12.*H(3,:) + 18.*H(5,:) + 10.*H(8,:);
y = fwht(x,N,'hadamard')
```

```
y =

     8     0    12     0    18     0     0    10
```

WHT تبدیلی برگشت پذیر است و سیگنال اصلی می تواند بصورت کامل بوسیله تبدیل معکوس بازیابی شود. تفاوت[42]بین سیگنال اصلی و سیگنال بدست آمده از تبدیل معکوس برابر صفر می باشد و این بیان کننده بازسازی[43]کامل سیگنال می باشد.

```
xHat = ifwht(y,N,'hadamard');
norm(x-xHat)
```

```
ans =

       0
```

تبدیل والش-هادامارد در واقع شامل بسطی است که به کمک امواج مربعی (مستطیلی) انجام می شود بنابراین در کاربردهایی که شامل سیگنال گسسته ای هستند که می توانند بصورت جملاتی از توابع والش بیان شوند مفید می باشد.

---

[42] Norm
[43] Reconstruction

معرفی تبدیل تصویر

تبدیل تصویر عبارت است از انجام عملی برای تغییر فضای نمایش پیش فرض یک تصویر رُقومی[44] و این یعنی انتقال از حوزه مکانی[45] به حوزه ای دیگر.

بطوریکه:

۱. تمامی اطلاعات ارائه شده در تصویر پس از انتقال به حوزه تبدیل مورد نظر حفظ شود. اما نمایش می تواند متفاوت باشد.
۲. تبدیل برگشت پذیر[46] باشد یعنی بتوانیم مجددا به حوزه مکانی بازگردیم.

معمولا در حوزه تبدیل ، اطلاعات بصورت فشرده نمایش داده می شوند و اصولا هدف از تبدیلات ، فشرده سازی تصویر می باشد. از استفاده های دیگر تبدیلات می توان به تحلیل تصویر اشاره کرد. اغلب تبدیلات تصویر ، تعمیمی از تبدیلات فرکانسی است که در آنها نمایش تصویر به کمک یک مولفه DC و چندین مولفه AC انجام می شود.

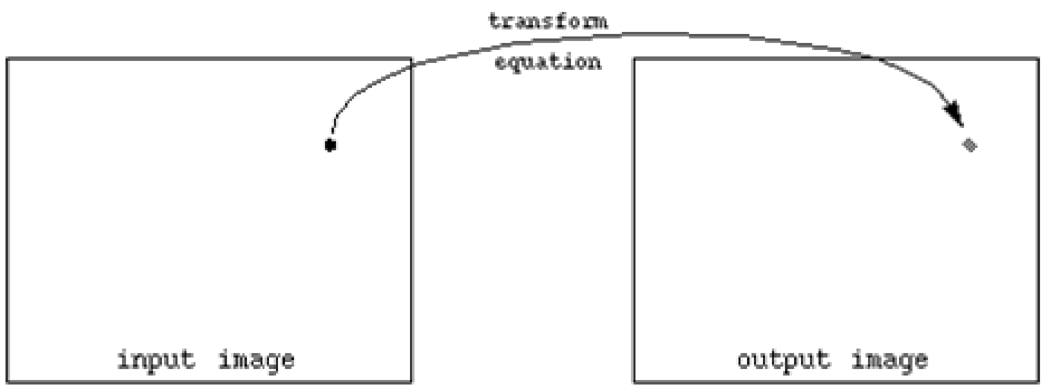
یک تبدیل داده های تصویر را به کمک یک معادله تبدیل به فضای ریاضی متفاوتی نگاشت می کند. یکی از مثال های ملموس و ساده از تبدیل ، انتقال از یک فضای رنگی به فضای رنگی دیگر می باشد. مثلا از فضای RGB به فضای SCT[47] و یا از فضای RGB به فضای HSL[48] .

البته باید خاطر نشان کرد که تبدیل از یک فضای رنگی به فضای رنگی دیگر تبدیلی با تناظر یک به یک بین پیکسل های ورودی و خروجی می باشد. از دیگر تبدیلات ، نگاشت داده های تصویر از حوزه مکانی به حوزه فرکانس (حوزه طیفی) می باشد. در این حالت تمامی پیکسل های ورودی(حوزه مکانی) به مقادیر در حوزه فرکانس مرتبط می شوند.

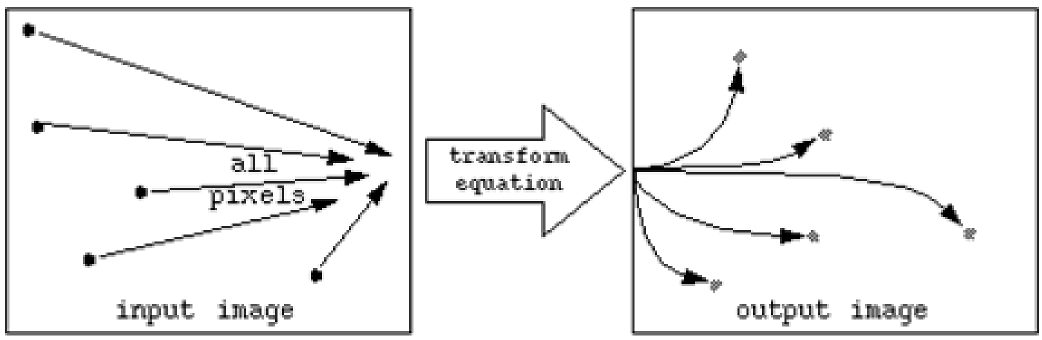
تبدیلات گسسته مبتنی بر توابع ویژه ای که توابع پایه نامیده می شوند صورت می گیرد. این توابع ویژه نوعا سینوسی یا مربعی (مستطیلی) می باشند. نسخه گسسته تابع پایه یک بُعدی ، بردار پایه نامیده می شود و نسخه گسسته تابع پایه دو بُعدی ، ماتریس های پایه یا تصاویر پایه نامیده می شود.

---

[44] Digital image
[45] Spatial Domain
[46] Reversible
[47] Spherical Coordinate Transform
[48] Hue/Saturation/Lightness

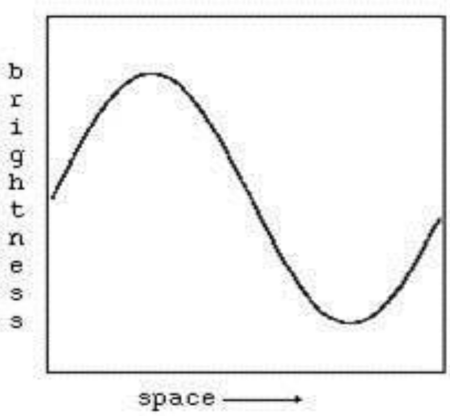


a) Color transforms use a single-pixel to single-pixel mapping.

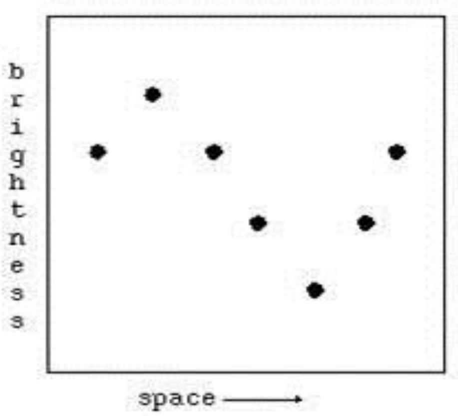


b) All pixels in the input image contribute to each value in the output image for frequency transforms.

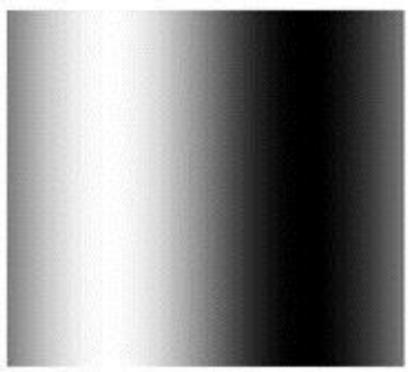
Figure 5.1-2: BASIS VECTORS AND IMAGES



a) A basis function: a 1-D sinusoid



b) A basis vector: a sampled 1-D sinusoid

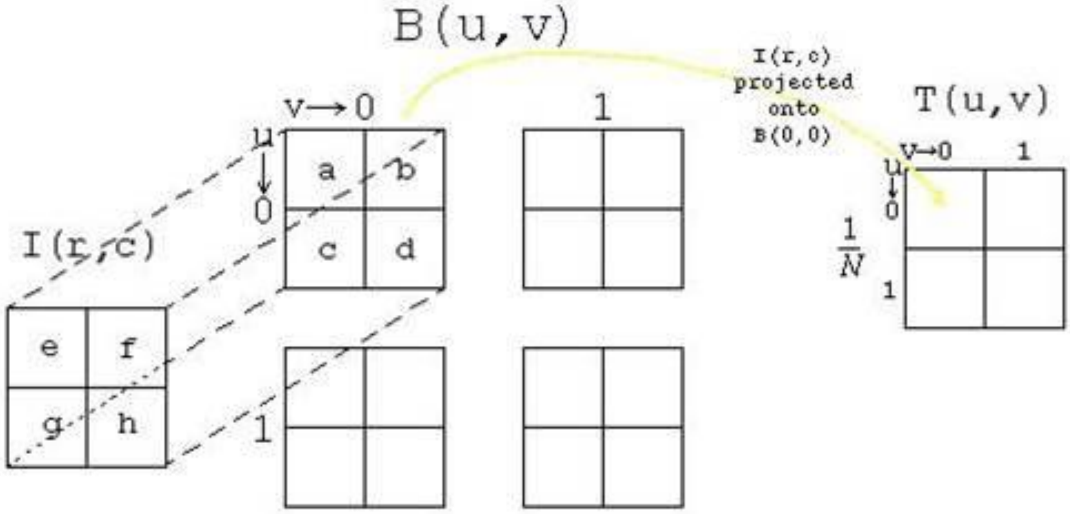


c) A basis image: a sampled sinusoid shown in 2-D as an image. The pixel brightness in each row corresponds to the sampled values of the 1-D sinusoids, which are repeated along each column.

فرآیند تبدیل داده های یک تصویر از یک حوزه به حوزه دیگر شامل افکنش[۴۹]تصویر بر روی ماتریس های پایه می باشد. جمله ریاضی برای فرآیند افکنش ، ضرب داخلی نامیده می شود. فرض کنید تصویری با ابعاد $N \times N$ داریم . شکل معمول معادله تبدیل بصورت زیر می باشد.

[49] Projecting

Figure 5.1-5: TRANSFORM COEFFICIENTS



To find T(u,v), we project I(r,c) onto the basis vectors of B(u,v). For example, T(0,0) is the projection of I(r,c) onto B(0,0), which equals (ea + fb + gc + hd).

در اینجا $T(u,v)=\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{c=0}^{N-1} I(r,c)B(r,c;u,v)$ **عبارت است از :**

- **u,v مختصات حوزه فرکانسی می باشند.**
- **T(u,v) ضرایب تبدیل هستند.**
- **B(r,c;u,v) ماتریس های پایه می باشند.**

فضای اصلی نمایش یک تصویر فضایی با ابعاد M×N می باشد و بصورت U[M×N] نمایش داده می شود. هر کدام از مختصات مکانی این فضا برابر با مکان (m,n) در تصویر رُقومی است.

نمونه کاربردی تبدیل والش-هادامارد

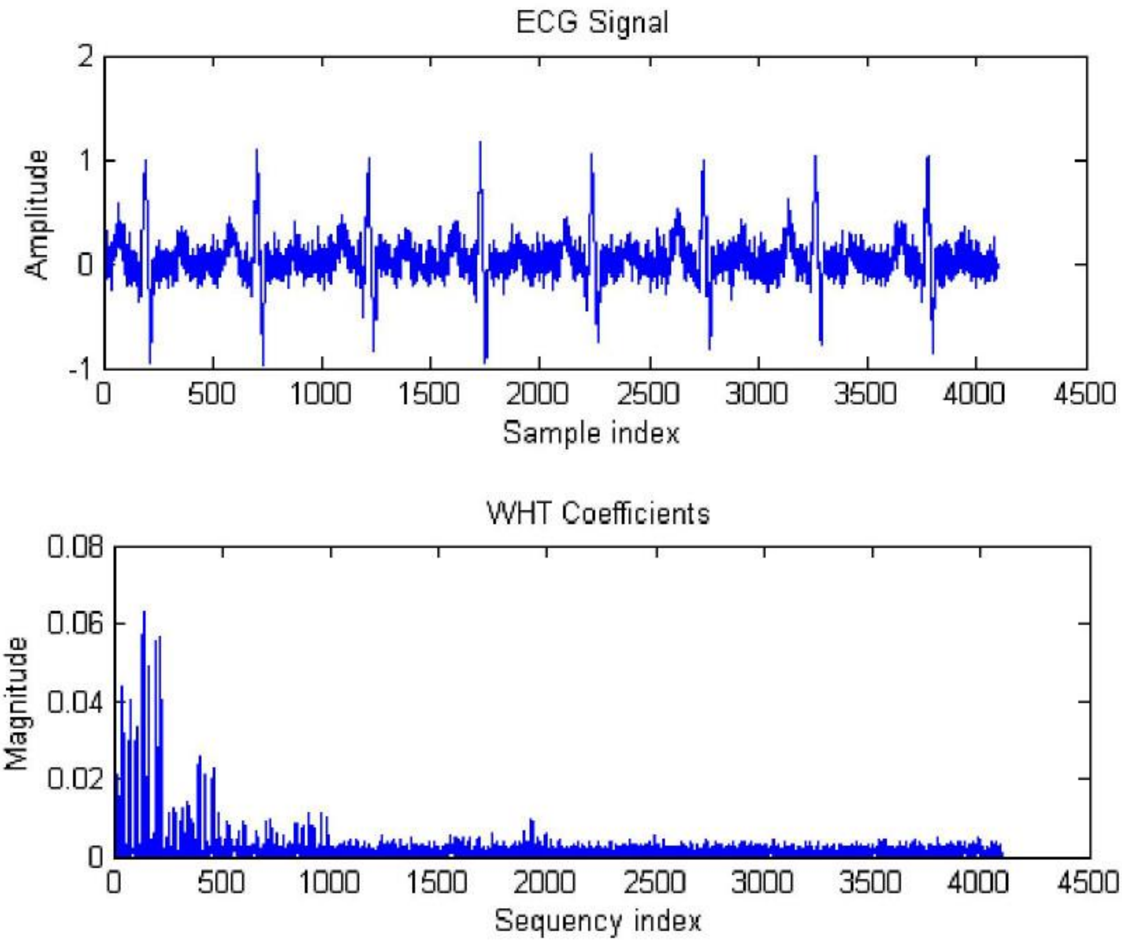
یکی از کاربردها در پردازش سیگنالهای ECG[50] می باشد. معمولا در هنگام ضبط سیگنالهای الکتروکاردیوگرام لازم است این سیگنال های در نمونه های زمانی مختلفی ضبط شوند . این نتایج ضبط شده که شامل مقادیر معتنابهی داده می باشند لازم است برای تجزیه و تحلیل و نیز مقایسه کردن و موارد مشابهی که بعدا انجام خواهد شد ذخیره شوند.

تبدیل والش-هادامارد برای فشرده سازی سیگنال ECG مناسب است زیرا این تبدیل فوایدی دارد که عبارتند از محاسبات سریع ضرایب والش-هادامارد، بازسازی سریع سیگنال و نیز نیاز به فضای ذخیره سازی کمتر بخاطر اینکه فقط ضرایب توالی را همراه با مقدار بزرگی شان ذخیره می کند.

یک سیگنال ECG و تبدیل والش – هادامارد آن در زیر مورد ارزیابی و نمایش قرار گرفته است.

```
x1 = ecg(512);                       % Single ecg wave
x = repmat(x1,1,8);
x = x + 0.1.*randn(1,length(x));     % Noisy ecg signal
y = fwht(x);                         % Fast Walsh-Hadamard transform
figure('Color','white');
subplot(2,1,1);
plot(x);
xlabel('Sample index');
ylabel('Amplitude');
title('ECG Signal');
subplot(2,1,2);
plot(abs(y))
xlabel('Sequency index');
ylabel('Magnitude');
title('WHT Coefficients');
```

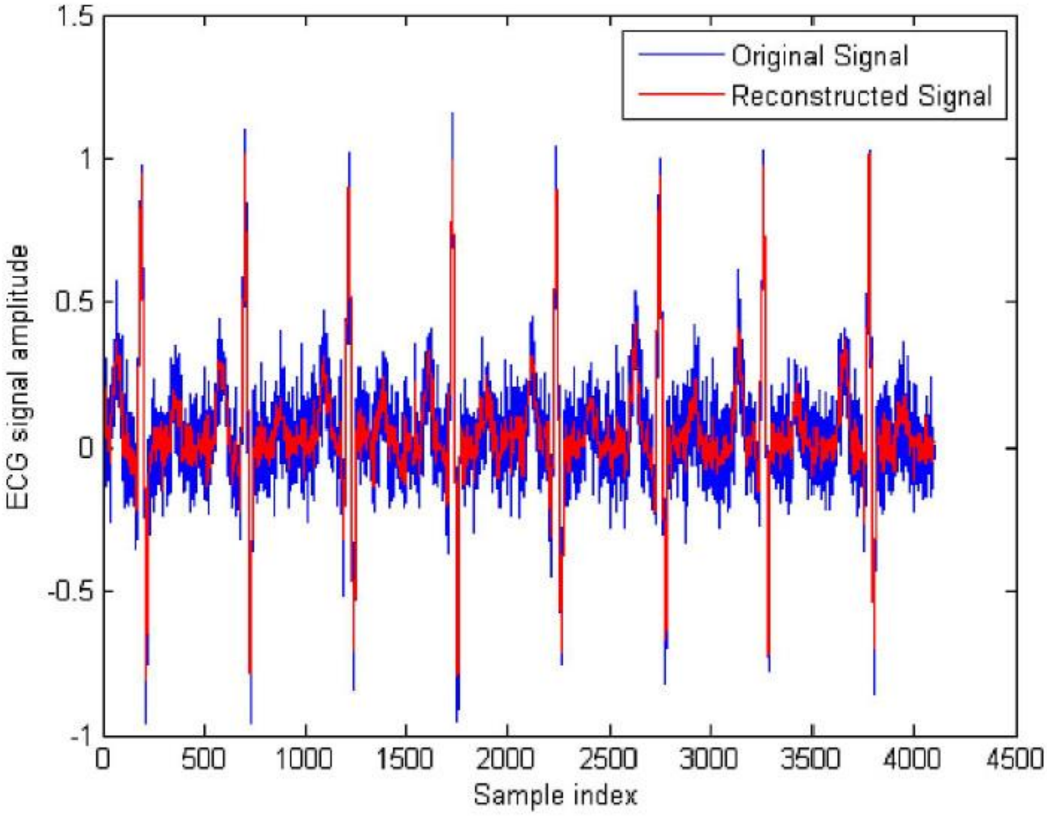
50 Electro-Cardiogram



همانگونه که در ترسیمات بالا مشاهده می شود بیشتر انرژی سیگنال در مقادیر پائینی توالی متمرکز شده اند. برای موارد تشخیصی فقط 1024 ضریب ابتدائی ذخیره می شوند و برای بازسازی سیگنال مورد استفاده قرار می گیرند. همچنین نادیده انگاشتن ضرایب توالی بالاتر ، در فرو نشانی نویز[۵۱]می تواند کمک کننده باشد. در زیر سیگنال اصلی و سیگنال بازسازی شده نمایش داده شده است.

[51] Noise Suppression

```
y(1025:length(x)) = 0;          % Zeroing out the higher coefficients
xHat = ifwht(y);                % Signal reconstruction using inverse WHT
figure('Color','white');
plot(x);
hold on
plot(xHat,'r');
xlabel('Sample index');
ylabel('ECG signal amplitude');
legend('Original Signal','Reconstructed Signal');
```



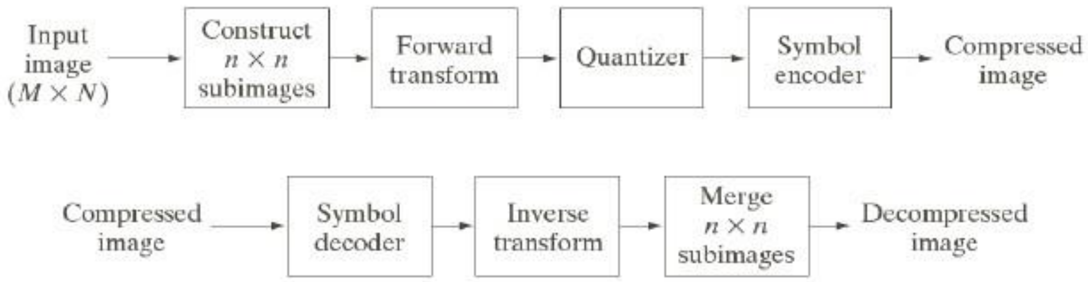
همانگونه که مشاهده می شود سیگنال بازسازی شده بسیار نزدیک به سیگنال اصلی می باشد. برای بازسازی سیگنال اصلی ، فقط 1024 ضریب ابتدایی و طول سیگنال ECG ذخیره شدند و این کار نمایانگر نرخ فشرده سازی تقریبی 4:1 می باشد.

```
req = [length(x) y(1:1024)];
whos x req

  Name      Size            Bytes  Class     Attributes

  req       1x1025           8200  double
  x         1x4096          32768  double
```

فشرده سازی به کمک تبدیلات

ایده اصلی کد کردن تبدیل بلاک[52] بر این اساس است که تصویر از حوزه مکانی به حوزه دیگری که در آن ضرایب دارای آنتروپی کمتری هستند منتقل شود . بنابراین ضرایب می توانند به نحوه کارآیی کد شوند.

کد کردن تبدیل بلاکی در فشرده سازی های jpeg و Mpeg استاندارد مورد استفاده قرار می گیرد. در ابتدا و پیش از انجام تبدیل تصویر را به زیر مجموعه های بلاکی $n \times n$ تقسیم می کنیم.



52 Block Transform Coding

تبدیل بلاکی باعث ایجاد یک بلاک $n \times n$ از مقادیر T(u,v) از یک بلاک $n \times n$ از تصویر f(x,y) می شود.

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} f(x,y)\, r(x,y,u,v)$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{n-1} T(u,v)\, s(x,y,u,v)$$

$r(x,y,u,v)$ = forward transform kernel

$s(x,y,u,v)$ = inverse transform kernel

اما از چه تبدیلی استفاده کنیم؟

برای پاسخ به این سوال باید تبدیل مورد نظر دارای شرایط زیر باشد.

- **توابع پایه متعامد داشته باشد.**
- **ضرایب غیر وابسته داشته باشد.**
- **تبدیلی متقارن و قابل تفکیک باشد.**
- **تبدیلی ساده و سریع الاجرا باشد.**

تعدادی از تبدیلاتی که شرایط مذکور را برآورده می کنند عبارتند از:

- **تبدیل فـوریـــــه گسسته**
- **تبدیل کسینوسی گسسته**
- **تبدیل والــش – هــادامــارد**

تبدیل والش – هادامارد مقادیر حقیقی T(u,v) را نتیجه می دهد.

$$r(x,y,u,v) = s(x,y,u,v) = H_m$$

where

$$H_m = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}$$

and

$$H_0 = 1$$

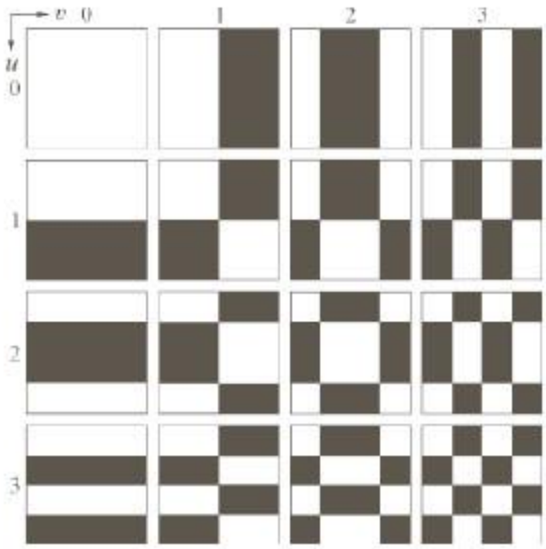
$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2^{-1/2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = 2^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = 2^{-3/2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در زیر توابع پایه ای والش – هادامارد مشاهده می شود.



Walsh-Hadamard
basis functions
with n=4

مراجع:

Zhanting Yuan, Lipeng Wang, Yuanzhi Jin, Water marking algorithm based on Walsh transform,

Application Research of Computers, Vol. 27, No. 7, 2010, 2654-2656, 2660

Guangyue Cai, Enqing Dong, An improved codeword search algorithm based on Hadamard transform,

Microelectronics & Computer, Vol. 24, No. 2, 2007, 154-156

Yang Qiao, Zhibin Pan, Ruiping Qiao, Dongping Li, Cheng Cai, An improved fast search algorithm

based on Hadamard transform and vector partition, Journal of Image and Graphics, Vol. 14, No.